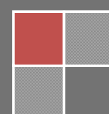
2014

Algèbre II

Cours Magistral- S4

M. ZOUHRI

Cours FEG Meknès



Cours d'Algèbre II

Plan du cours :

- Rappels sur les calcul matriciel
- chapitre 1 : système linéaires
- chapitre 2 : Réduction des matrices
- chapitre 3 : Forme bilinéaires symétriques - Formes quadratiques

Rappels :

① Matrices à coefficient réels :

Déf : soient n et p ∈

une matrice notée a est une application de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ dans $\mathbb{R}$

$$A : \begin{array}{l} \{1 \dots n\} \times \{1, \dots, p\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) \longrightarrow a_{ij} \end{array}$$

a_{ij} est le terme général de A

on note : $A = (a_{ij})$

on note : $M_{np}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice réelles du type (n, p)

on représente la matrice A par un tableau à n lignes et p colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix}$$

Matrice Particulière

si $n = p$ alors la matrice est appelée matrice carré d'ordre n on note : $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice carrés réelles d'ordre n

$$M(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Matrice Nulle

matrice dont terme sont nulle d'ordre n

$$O_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrice diagonale

$D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

D diagonale $\Leftrightarrow \forall i \neq j \quad d_{ij} = 0$

et $\exists$ au moins un $i \mid d_{ii} \neq 0$

Matrice Identité

matrice diagonale dont tous les termes diagonaux valent 1 :

on note : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire

$T = (t_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $t_{ij} = 0$ pour $i > j$

T triangulaire inférieure si $t_{ij} = 0$ pour $i < j$

② opérations sur les matrices :

Soient A, B, C, D des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$

- on définit $C = A + B$ par : $c_{ij} = a_{ij} + t_{ij}$
- on définit $D = A - B$ par : $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$
- on définit $C = \lambda . A$ par : $c_{ij} = \lambda a_{ij}$
- on définit $C = A \times B$ par : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{j}$

j A i B = i j c_{ij}

Matrice Idempotente :

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est idempotente si $A^2 = A$

$A^3 = A.A^2 = A.A = A^2 = A$

$A^n = A$

Rq : si A est idempotente alors la matrice $(I_n - A)$ est idempotente $A^2 = A$

$(I_n - A)^2 = I_n - A$?

$(I_n - A)^2 = (I_n - A)(I_n - A)$

$= I_n^2 - I_n A - A I_n + A^2$

$= I_n - A - A + A$

$= I_n - A$

$I_n A = A$
$A I_n = A$
$A^2 = A$

Inversion de matrices :

$A \in M_n(\mathbb{R})$ A est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R}) / AB = I_n$ ou $BA = I_n$

B est la matrice inverse de A et on note : $B = A^{-1}$
$A = B^{-1}$

Propriétés :

- si $A.B = I_n$ alors $BA = I_n$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- Formule de moivre :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$ si $AB = BA$

Transposée d'une matrice :

On appelle transposée de $A \in M_n(\mathbb{R})$, notée ${}^tA$, la matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tA \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
* ${}^t(\lambda A) = \lambda \, {}^tA$
* ${}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA$
* ${}^t({}^tA) = A$
* ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

Matrice symétrique :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique $\iff {}^tA = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

~~Matrice~~
Matrice anti-symétrique :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est anti-symétrique $\iff {}^tA = -A$

Propriétés :

* si A inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique
* si A inversible et anti-symétrique alors A^{-1} est anti-symétrique
* si A symétrique $\Rightarrow \forall k \geq 1$ A^k est symétrique
* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $M = S + A$ où S est symétrique et A anti-symétrique

Il suffit de prendre : $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$

$${}^tS = \frac{1}{2}\,{}^t(M + {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$$

$${}^tA = \frac{1}{2}\,{}^t(M - {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$$

③ Matrice d'un endomorphisme :

Soit f un endomorphisme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dim n

si E est muni de la même base au départ et à l'arrivée alors on appelle matrice de f dans cette base la matrice

de la famille des images par f vecteurs de cette base dans elle-même

EX : $n = 3$

$B = (e_1, e_2, e_3)$

$f(e_1) = e_1 - e_2$

$f(e_2) = e_1 - e_3$

$f(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3$

on note : $M(f.B)$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix}$$

$V \in E$, $f(V)$?

$B(e_1, e_2, e_3)$

$\exists ! \ (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3 \ / \ V = \alpha e_1 + \beta e_2 + \delta e_3$

$f(V) = f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \delta e_3)$

$= \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \delta f(e_3)$

$= \alpha (e_1 - e_2) + \beta (e_1 - e_3) + \delta (-e_1 + e_2 + e_3)$

$= (\alpha + \beta - \delta) e_1 + (\delta + \alpha) e_2 + (\alpha - \beta) e_3$

$f_B(V) = M(f, B) - V_B$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \delta \\ -\alpha + \delta \\ -\beta + \delta \end{pmatrix}$$

Changement de base :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dim n muni de 2 bases B et B'

La matrice de la famille B' dans la base B est appelée matrice de passage de B dans B'

ex : $B = (e_1, e_2, e_3)$

$f(e_1) = e_3$; $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$; $f(e_3) = e_3$

$B' = (f_1, f_2, f_3)$

$f_1 = e_1 - e_3$; $f_2 = e_1 - e_2$; $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

soit P la matrice de passage de B à B'

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \qquad M(f.B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} f_{e_1} & f_{e_2} & f_{e_3} \end{matrix}$$

P est appelée matrice de passage de B à B'

Question : $M(f, B')$? matrice de f dans B'

$f(e_1) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = e_3 - e_3 = 0$

$f(e_2) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_3 + e_1 - e_2 - e_3$

$= e_1 - e_2$

$= f_2$

$f(f_3) = f(-e_1 + e_2 + e_3) = f(-e_1) + f(e_2) + f(e_3) = -f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)$

$= -e_3 + (-e_1 + e_2 + e_3) + e_3$

$= -e_1 + e_2 + e_3$

$= f_3$

$$\begin{cases} f(f_1) = 0 \\ f(f_2) = e_1 - e_2 = f_2 \\ f(f_3) = f_3 \end{cases} \qquad \text{D'où } M(f, B') \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f(f_1) & f(f_2) & f(f_3) \end{matrix}$$

Matrice de passage de B' à B

$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 \\ f_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 = f_1 + f_3 \\ e_3 = f_2 + f_3 \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix}$$

Matrice de passage de B' dans B

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow Q = P^{-1} \; (P = Q^{-1})$$

$$Q\, M(f,B)\, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(f, B')$$

Résumé : $M(f, B') = P^{-1} M.(f, B) P$

ou bien $M(f, B) = P M(f, B') P^{-1}$

$M(f, B) = Q^{-1} M(f, B') Q$

Définition :

Soient A et $B \in M_{np}(\mathbb{R})$ A et B sont <u>équivalents</u> si et seulement si $\exists$ Q matrice de $M_n(\mathbb{R})$ régulière et P matrice de $M_p(\mathbb{R})$ régulière telque $B = QAP$

En particulier : si A et $B \in M_n(\mathbb{R})$, Alors A et B sont semblables si et seulement si $\exists$ $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$

propriétés :

- Deux matrices semblables sont équivalents : $Q = P^{-1}$
- $B = P^{-1} A P \Rightarrow B^n = P^{-1} A^n P \quad \forall n \geq 1$
- soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A ; le réel défini par :

$Tr(I_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$tr(I_n) = n$

- $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha\, tr(A) + \beta\, tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
- $tr(PAP) = tr(A)$

Rang d'une matrice :

soit $A \in M_{np}(\mathbb{R})$ on appelle rang A et on note $rg(A)$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les p colonnes de A

Autrement dit, le rang est le nombre maximal des p vecteurs colonnes linéairement indépendants

- $rg(A) = 0 \iff$ A nulle
- $rg(A) = 1 \iff$ Les colonnes de A sont 2 à 2 proportionnelles

ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrice echelonnée :

- $A \in M_{np}(\mathbb{R})$; L_i la $i^{ème}$ ligne de A $i = 1, \dots, n$

pour chaque ligne L_i, soit $d(i)$ le plus petit indice j telque $a_{ij} \neq 0$ A est dite échelonnée supérieurement s'il existe un entier

$r \in \{0, \dots, n\}$ tel que :

$\forall i \leq r$, L_i non nulle

$\forall i > r$, L_i nulle

la suite des entiers $d(1), d(2), \dots, d(r)$ est strictement croissante une telle matrice est de rang r

- Les coefficients de A situés à $d(1), d(2) \dots d(r)$ sont appelés des .

ex :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 3 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{4} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ premier terme normal

$r = 4$ Nbr de lignes non nulles.

A est échelonnée supérieurement

$d(1) = 2$ ①
$d(2) = 3$ ③
$d(3) = 5$ ④
$d(4) = 6$ ⑨

$g(A) = 4$

Question : Comment échelonner une matrice donnée ?

opération élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) d'une matrice

soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

soient $L_1, L_2 \dots L_n$ les lignes de A

on appelle opération élémentaire sur les lignes de A, l'une des opérations suivantes.

- Multiplier une ligne L_i par un réel non nul α ; $L_i \Rightarrow \alpha L_i$
- Ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j

  $L_i \Rightarrow L_i + \beta L_j$

  Echanger 2 lignes L_i et L_j $L_i \longleftrightarrow L_j$

Application 1 :

Calcul du rang d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 14 & 21 & 16 \end{pmatrix} \quad A \in \mathcal{M}_{45}(\mathbb{R}) \quad rg(A) \leq 4$$

Calculons la matrice échelonnée supérieurement équivalente à A

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 14 & 21 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - 3L_1 \sim \\ L_3 - 2L_1 \\ \quad -2L_3 + L_2 \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -32 \\ 0 & -4 & -17 & -26 & -23 \\ 0 & -2 & 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -26 & -32 \\ 0 & 0 & \textcircled{18} & 28 & 14 \\ 0 & 0 & -36 & -56 & -28 \end{pmatrix} 2L_3 + L_4 \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 15 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & \boxed{-8} & -16 & -24 & -32 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 28 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B matrice échelonnée équivalente à A

Or $rg(B) = 3$ soit $rg(A) = rg(B) = 3$

Application 2 : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible $\Longleftrightarrow$ Il est possible par une suite d'opérations élémentaires sur les ligne de passer de A à I_n

La même suite d'opérations élémentaires de lignes appliquées dans le même ordre permet de passer de I_n à A^{-1}

$$(A / I_n) \overset{OEL}{\rightsquigarrow} (I_n / A^{-1})$$

Ex : inversions cette Matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\overset{-\frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \overset{L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\overset{3L_2 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right|$$

I_3 A^{-1}

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$=$

exercice : Inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A \,/\, I_3) \overset{OEL}{\rightsquigarrow} (I_3 \,/\, A^{-1})$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right| \quad -4 \times L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \boxed{\frac{5}{8}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\quad}_{I_3}$ $\underbrace{\quad}_{A^{-1}}$

(4) Déterminant d'une matrice :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le déterminant de A est un nombre réel noté : $\det(A) = |A|$

$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Déterminant simple

$n = 1$

$a \in \mathbb{R}$ $\det(a) = a$

$n = 2$

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\det(A) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$

$n = 3$

$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

Règles de Sarrus

$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix}$

$= aei + dhc + ghf - ceg - fha - ibd$

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

$= 1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 - 3 \times 3 \times 3$

$= 6 + 6 + 6 - 8 - 1 - 27$

$= 18 - 36$

$|A| = -18$

calcul effectif d'un déterminant d'ordre n

on appelle mineur de terme a_{ij} de A, notée M_{ij} le déterminant $(n-1)$ obtenu en supprimant la ligne et la colonne de a_{ij} dans A

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boxed{(-1)^{i+j} M_{ij}}$ (C_{ij})

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

* $i = 1$

$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} C_{1j}$

$= \underbrace{a_{1.1}}_{1} C_{11} + \underbrace{a_{1.2}}_{2} C_{1.2} + \underbrace{a_{1.3}}_{3} C_{1.3}$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$C_{1.3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$

$\det(A) = 1 \times 5 + 2 \times (-1) + 3 \times (-7)$

$= 5 - 2 - 21$

$= -18$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

* $j = 1$

$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} C_{i1}$

$= a_{11} C_{11} + a_{2.1} C_{2.1} + a_{3.1} C_{3.1}$

$= 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 5 - 2 - 21$

$= -18$

Propriétés des déterminants :

* La valeur d'un déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne, autrement dit si on multiplie une colonne par

$\lambda \neq 0$ le déterminant est aussi multiplé

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8$$

* si une colonne a une ligne est nulle alors le déterminant ✗
* si on permute 2 colonnes alors le déterminant change

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

* on ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des autre colonnes

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

* un déterminant est nul $\Leftrightarrow$ ses lignes ou ses colonnes sont liées

un déterminant est normal $\Leftrightarrow$ ses lignes ou ses colonne sont libres.

A inversible $\Leftrightarrow$ ses lignes ou ses colonnes sont linéairement indépendant

$\Leftrightarrow rg(A) = n$

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

* $\det(A) = \det({}^tA)$
* $\lambda \neq 0$
* $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
* si A triangulaire ou diagonal alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\det(I_n) = 1$

* si A inversible alors :

$A \cdot A^{-1} = I_n$

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Exercice :

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 17 & 12 \\ 1 & 5 & 12 & 24 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 11 & 23 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 7 - 6$

$= 1$

Application au calcul d'inverse d'une matrice :

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$A \cdot {}^t\text{com}(A) = {}^t\text{com}(A) \cdot A$

$= \det(A)\, I_n$

si A est inversible alors : $\det(A) \neq 0$

$$\frac{A \cdot {}^t\text{com}(A)}{\det(A)} \qquad A \cdot \boxed{\frac{{}^t\text{com}(A)}{\det(A)}} = I_n \quad \rightarrow A^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\text{com}(A)}$$

${}^t\text{com}(A)$ → Matrice adjointe de A

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

com (A)

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{com}\,A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$^{t}\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

chapitre 1 : systèmes d'équations linéaires :

I) système linéaires :

1 - définition

on appelle système linéaire de n équation et à coefficients dans $\mathbb{R}$, tout système de la forme.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

* Les a_{ij} sont les coefficients de (S)
* la matrice A de terme général a_{ij} est la matrice de (S)

  $A = (a_{ij})$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$
* le p - uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est le vecteur des inconnues
* un p - uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution de (S) si les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ satisfont les n équation de (S)
* Résoudre (S) consiste à décrire l'E des solution de (S)
* l'E des solution de (S) peut être vide ou non s'il est

non vide, il est réduit soit a une solution unique soit une infinité de solution

S ⟶ ∅
S ⟶ une seul solution
S ⟶ une infinité de solution

* (S) est dit homogène si son second membre est nul. ($b_i = 0$) $1 \leq i \leq n$
* 2 système sont équivalent s'il ont m̂ ensemble de solutions
* Ecriture matriciel de (S)

$$(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{= B}$$

$(S) \Leftrightarrow \boxed{AX = B}$

si $B = 0$ Alors (S) est homogène et on a $AX = 0$ système ayant au moins la solution trivial $X = 0$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$; ... ; $x_p = 0$)

* si $n = p$ alors le (S) est carré

II système de cramer :

un système (S) est dit de cramer si :

* $n = p$ (système carré)
* le rang de se matrice A est égal à n
* la matrice A est inversible
* $\det(A) \neq 0$

un système de cramer admet une solution unique qui peut être fournis par l'inverse de A

$(S) \Leftrightarrow AX = B$

si A inversible alors

$A^{-1} . AX = A^{-1} . B$

$I_n . X = A^{-1} . B$

$\boxed{X = A^{-1} . B}$

Exemple :

$$(S) \begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 3x + 2y + z = -12 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}}_{=B}$$

$$(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow (S)$ est un système de cramer

$(S) \Leftrightarrow AX = B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} . B$

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Résolution par la méthode de cramer : ou des déterminant de cramer

pour un système de cramer on calcule les déterminats de cramer notés D_{x_i}

pour $i = 1, \ldots, n$

D_{x_i} est le déterminant de la matrice A du système où

l'on a remplacé la $i^{ème}$ colonne par le vecteur B

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & i & & n \\ a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

on calcule l'unique solution du système (S) ainsi :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_{x_1}}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{D_{x_n}}{|A|} \end{cases}$$

Ex :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 3x + 2y + z = -12 \end{cases}$$

(S) est de Cramer car $\det(A) = 18 \neq 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -12 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 6 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & -12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -30 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 1 \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -30 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -7 & -30 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 1 \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -30 \end{vmatrix} = 108$$

D'où :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{|A|} = \dfrac{-108}{18} = -6 \\ y = \dfrac{D_y}{|A|} = \dfrac{0}{18} = 0 \\ z = \dfrac{D_z}{|A|} = \dfrac{108}{18} = 6 \end{cases}$$

l'on a remplacé la $i^{ème}$ colonne par le vecteur B

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & i & & n \\ a_{11} & a_{12} & b_1 & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

on calcule l'unique solution du système (S) ainsi :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_{x_1}}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{D_{x_n}}{|A|} \end{cases}$$

Ex :
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 3x + 2y + z = -12 \end{cases}$$

(S) est de Cramer car $\det(A) = 18 \neq 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -12 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 6 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & -12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -30 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 1 \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -30 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -7 & -30 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 1 \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -30 \end{vmatrix} = 108$$

D'où :
$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{|A|} = \dfrac{-108}{18} = -6 \\ y = \dfrac{D_y}{|A|} = \dfrac{0}{18} = 0 \\ z = \dfrac{D_z}{|A|} = \dfrac{108}{18} = 6 \end{cases}$$

III . Résolution du système linéaire par la méthode de Cramer :

principe : par une suite d'opération élèmentaires ; on transforme le système (S) en un système (Σ) équivalent et dont la matrice est échelonnée supérieurement suivant les lignes

la résolution de (Σ) fournit les solution de (S)

soit le système (S) / (S) ⟺ A X = B

on appelle matrice augmentée de (S) ; la matrice A de (S) concaténée avec le second membre B.

on note : (A/B)

on échelonne cette matrice augmentée suivante les lignes par des opérations élèmentaires suivant les lignes

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_m \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} \; (\neq 0) & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} & b_m \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a_{22} & & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & & a_{mp} & b_m \end{array}\right)$$

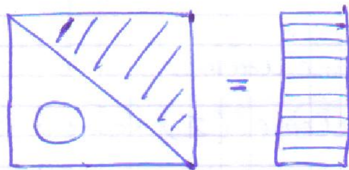
$L_2 \leftarrow a_{11} L_2 - a_{21} L_1$

$L_m \leftarrow a_{11} L_m - a_{m1} \cdot L_1$

et ainsi de suite

Forme finale de (Σ) . En fin de parcours, (S) est transformé en un système echelonné supérieurement (Σ) et qui peut prendre 3 forme .

1ère cas (Σ) s'écrit



c'est le cas d'un système de cramer, ramené à une forme triangulaire supérieure et qu'on résultat en (cascade), ce qui donne la solution unique de (S)

EX :

$$(S)\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+y-3z=0 \\ -x+2y-2z=-1 \end{cases}$$

$$(S) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{array}\right)$$

(les trois premières colonnes : A' ; la dernière : B')

$$(S) \iff A'X = B'$$

$$(S) \iff (\Sigma) \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -3y+3z=-2 \\ -3z=-8 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{10}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

EX 2 :

$$(S)\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ x+3y-2z=5 \\ 2x-y+\lambda z=1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$(S) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & \lambda-6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 3 & \lambda-6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \frac{24}{5} \end{array}\right)$$

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/5 \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ y-z=\frac{3}{5} \\ \boxed{(\lambda-3)} z = -\frac{24}{5} \end{cases}$$

$\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

$0.z = -\frac{24}{5}$ on a $0 = -\frac{24}{5}$ Absurde

(S) n'a pas de solution

$\lambda - 3 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 3$

$$z = -\frac{24}{5} \cdot \frac{1}{\lambda - 3}$$

$$\boxed{z = \frac{24}{5(3-\lambda)}}$$

$$y - z = \frac{3}{5}$$

$$y = z + \frac{3}{5} = \frac{24}{5(3-\lambda)} + \frac{3}{5}$$

$$\boxed{y = \frac{33 - 3\lambda}{5(3-\lambda)}}$$

$$x = 2 + 2y - 3z$$

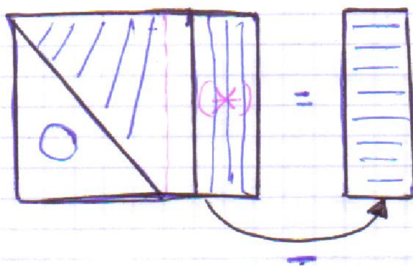
$$= 2 + 2 \cdot \frac{33 - 3\lambda}{5(3-\lambda)} - \frac{72}{5(3-\lambda)}$$

$$\boxed{x = \frac{24 - 16\lambda}{5(3-\lambda)}}$$

D'où l'unique solution de (S)

$$\begin{cases} x = \dfrac{24 - 16\lambda}{5(3-\lambda)} \\ y = \dfrac{33 - 3\lambda}{5(3-\lambda)} \\ z = \dfrac{24}{5(3-\lambda)} \end{cases} \qquad \lambda \neq 3$$

2ème cas : (Σ) s'écrit



Il y'a des inconnus en surnombre (c'est la zone (*)) ces inconnus excédentaires càd non principales sont reportées au second membre où elles jouent le rôle de paramètres arbitraires ou s résout alors le

système par rapport aux inconnus principal c'est alors un système de Cramer dont l'unique de solution s'exprime en fonction des inconnues non principales les valeur arbitraire des cas inconnues non principales font que (S) a une infinité de solutions

Ex :

$$(S)\begin{cases} x+3y+5z-2t-7H=3 \\ 3x+y+z-2t-H=1 \\ 2x-y-3z+7t+5H=2 \\ 3x-2y-5z+7t+8H=d \end{cases} \quad d\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ d \end{pmatrix}}_{B}$$

Matrice augmenté $(A|B)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -8 & -7 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -5 & 7 & 8 & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -8 & -7 & 3 \\ 0 & -8 & -14 & 4 & 20 & -8 \\ 0 & -7 & -13 & 11 & 19 & -4 \\ 0 & -11 & -20 & 13 & 29 & d-9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & -8 & -14 & 4 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 60 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & -6 & 60 & 12 & 8d+16 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & -8 & -14 & 4 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 60 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\lambda-8 \end{array}\right)$$

$(S) \Leftrightarrow (\Sigma)$

$$(\Sigma)\begin{cases} x+3y+5z+2t-7u=3 \\ -8y-14z+4t+20u=-8 \\ -6z+60t+12u=24 \\ 0=8\lambda-8 \end{cases}$$

si $8\lambda-8 \neq 0$ càd $\lambda \neq 1$ alors le système (Σ) et par suite (S) n'est pas de solution

* si $8\lambda-8=0$, càd $\lambda=1$ alors on a $0=0$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+5z=3+2t+7u \\ -8y-14z=-8-4t-20u \\ -6z=24-60t-12u \end{cases}$$

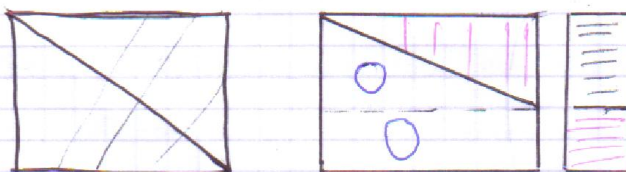
système de cramer avec inconnus principales (x,y,z) et inconnues non principale ou arbitraire (t,u)

D'où la solution

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=8-17t-4 \\ z=-4+10t+24 \end{cases}$$

$t\in\mathbb{R}$, $u\in\mathbb{R}$

3ème cas Σ s'écrit :



3ème cas

Ici il y'a des équations en ser nombre ou non principales

leurs premier membre sont nuls , Tout dépend de leurs seconds membre (zone A)

- si l'un entre eux est non nul alors (Σ) et (S) n'ont pas de solution
- si tous ces seconds membre (zone +) sont nulles, Σ est réduit à ses équation principal qui forment un système de cramer

(Σ) et donc (S) aura une unique solution obtenue en résolvant ce système en cascades

Exercice :

$$(S)\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 5z = 20 \\ 2x - y - z = 15 \\ -x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{a} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}}_{B}$$

(A/B)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 20 \\ 2 & -1 & -1 & 15 \\ -1 & -1 & 4 & 12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 14 \\ 0 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & -41 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & -41 \\ 0 & 0 & 0 & 357 \end{array}\right)$$

(Σ) est le système

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -y - 4y = 14 \\ 5z = -41 \end{cases}$$

Absurde $0 = 357$

(Σ) et (S) n'ont pas de solution

Exemple récapitulative

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

① det (A) ?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

det (A) = 2 ≠ 0 donc A est inversible

② calculer A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^{t}\mathrm{com}(A)$$

$$\mathrm{com}(A) \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^{t}\mathrm{com}(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A \,/\, I_3) \rightsquigarrow (I_3 \,/\, A^{-1})$$

③ un entrepreneur utilise 2 imports X_1 et X_2 (en quantité resp x_1 et x_2) pour produire un seul outpout X (en quantité la fonction de production et donnée par $q = A x_1^a x_2^b$

trouver a, b, A relative au observation, enregistrées en mixant la quantité q par déférence valeur de x_1 et x_2

x_1	x_2	q
10	100	1000
100	10 000	100 000
10	10 000	1000

$q = A x_1^a x_2^b$

$\log q = \log (A x_1^a x_2^b)$

$= \log(A) + \log x_1^a + \log x_2^b$

$\underbrace{\log_{10} q}_{Q} = \underbrace{\log_{10} A}_{c} + a \underbrace{\log_{10} x_1}_{y_1} + b \underbrace{\log_{10} x_2}_{y_2}$

$\log_{10} 10 = \frac{\log 10}{\log 10} = 1$

$\boxed{a y_1 + b y_2 + c = Q}$

$x_1 = 10$; $x_2 = 10^2$; $q = 10^3$

$\boxed{a + 2b + c = 3}$

$x_1 = 10^2$; $x_2 = 10^4$; $q = 10^5$

$\boxed{2a + 4b + c = 5}$

$x_1 = 10$, $x_2 = 10^4$; $q = 10^3$

$\boxed{a + 4b + c = 3}$

pour trouver a, b et A il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ 2a + 4b + c = 5 \\ a + 4b + c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$AX = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1} . A X}_{I_3} \; A^{-1} . B$

$\boxed{X = A^{-1} . B}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & +\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

$c = \log_{10} A = 1$

$\Rightarrow \boxed{A = 10}$

$q = A\, x_1^{a}\, x_2^{b}$

$= 10 x_1^2 \, x_2^0$ 1

$\boxed{q = 10 x_1^2}$

Chapitre 3 : Réduction de matrices.

I Valeurs propres - vecteurs propres

Définition (1)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

* λ est une valeur propre de A soit seulement s'il excite :
$X \neq 0 \in \mathbb{R}^x$ / $\boxed{AX = \lambda X}$

* un tel vecteur X est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ

* L'ensemble des valeurs propres de A est appelé Spectre de A

* l'ensemble des vecteurs propres associé à une valeur propre λ est appelé sous espace propre de λ

$AX = \lambda X$

$A(\alpha X) = \lambda(\alpha X)$, avec $\alpha X = y$

Remarque :

Ce système $AX = \lambda X$ admet au moins une solution $X = 0$

pour savoir si λ est une valeur propre de A il faut savoir si le système $AX = \lambda X$ admet une solution autre que $X = 0$

définition ② :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$

on appelle polynome caracteristique de A noté P_A, le polynome de degré n en λ défini par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Ex : $A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $n = 2$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$

$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6$
$= \lambda^2 - 5\lambda - 2$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

propriété : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

* $P_A(\lambda = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} . I_n(A) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$
* A et ${}^tA$ ont même polynome caractéristique
* Deux matrices semblable est même polynome caractéristique

A et B semblable $\Leftrightarrow$ $\exists P$ inversible $/ B = P^{-1}.A.P$

$P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

* si $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ alors : $(A - \lambda I_n)$ est inversible

$\Rightarrow$ le système $(A - \lambda I_n) X = 0$ à l'unique solution

$X = (A - \lambda I_n)^{-1} 0 \, \varepsilon = 0$

$$AX = \lambda X$$

$\Rightarrow$ λ n'est pas valeur propre de A

* $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$\Rightarrow$ $(A - \lambda I_n)$ non inversible

$\Rightarrow$ rang $(A - \lambda I_n) < n$

le système $(A - \lambda I_n) X = 0$ à une infinité de solution autre que :

$\Rightarrow \exists X \neq 0 \ / (A - \lambda I_n) X = 0$

$AX = \lambda X$

$\Rightarrow \lambda$ valeur propre de A de vecteur propre $X \neq 0$

proposition :

λ et valeur propre de $A \iff P_A(\lambda) = 0$

λ et racine du polynome caracteristique

$P_A(\lambda) = 0$ est applée équation caracteristique

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda) + 3$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$P_A(\lambda) = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 3$

vecteur propres : $\lambda_1 = 1$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / AX = \lambda_1 X$

$AX = X$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = x \\ 3x + 4y = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ -3y + 4y = y \end{cases}$$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$; $y \in \mathbb{R}^*$

soit le vecteur propre

$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à $\lambda_1 = 1$

* $\lambda_2 = 3$

$AX = 3x$

$$\begin{cases} -y = 3x \\ 3x + 4y = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} ; \; x \in \mathbb{R}^*$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$

Propriétés :

* Les valeurs propres d'une matric triangulaire A sont les éléments diagonaux de A

EX :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 ; \; \lambda_2 = 4 , \; \lambda_3 = 6$$

$$P_A(\lambda) = \det (A - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)$$

$$P_A(\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda_2 = 4 \; ; \; \lambda_3 = 6$

* si A est inversible et λ valeur propre de A, alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propres de A^{-1} associé au même vecteur propre de λ

$\exists X \neq 0 / AX = \lambda X$

$A^{-1} . AX = A^{-1} . \lambda X$

$I . X = \lambda A^{-1} X$

$X = \lambda A^{-1} X$

donc $A^{-1} X = \frac{1}{\lambda} . X$

* si λ est valeur propre de A, alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, λ^p est valeur propre de A^p associé au même vecteur propre que λ

$\exists X \neq 0 / AX = \lambda X$

$A . AX = A . \lambda X$

$$\begin{cases} A^2 X = \lambda AX = \lambda^2 X \\ A^3 X = \lambda^3 X \\ A^p X = \lambda^p X \end{cases}$$

* Des vecteurs propres associé à des valeur propres distincts sont linéairement indépendants

$$\begin{cases} AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ AX_2 = \lambda_2 X_2 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow X_1$ et X_2 sont libres

X_1 et X_2 sont liées

$\Rightarrow \exists \alpha \neq 0 / X_2 = \alpha X_1$

$AX_2 = \lambda_2 X_2$

$A(X_2) = \alpha \lambda_2 X_1$

$AX_1 = \lambda_1 X_1$

$\alpha AX_1 = \alpha \lambda_2 X_1$

$AX_1 = \lambda_2 X_1$

$\Rightarrow \lambda_1 X_1 = \lambda_2 X_1$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X_1 = 0$

car $X_1 \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ absurde

Donc X_1 et X_2 sont libres !

II Diagonalisation de matrice :

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on dit A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale D, c'est à dire qu'il existe une matrice inversible notée P ; telle que $P^{-1}.A.P = D$

D est appelée une réduite diagonale de A

Remarques :

* si A est diagonalisable, il n'y a pas unicité de la matrice P
* on sait que $P^{-1}.A.P$ et A ont même polynôme caractéristique,

$P_A(\lambda) = P_D(\lambda)$

Les éléments diagonaux de D ne sont autre que les valeurs propres de A on note : $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

* P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base de vecteurs propres de A
* La trace de $P^{-1}.A.P$ est égale à la trace de A.

$D = P^{-1}.A.P$

$Tr(D) = Tr(A)$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Tr(A)$$

* $\det(D) = \det(A)$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$$

Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

A est diagonalisable si et seulement si A admet n vecteurs propres linéairement indépendants

De plus, P aura comme colonne les vecteurs propres de A rangé dans l'ordre où apparaissent les valeurs propres dans D

$$D = P^{-1} . A . P$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1} . A . (U_1, U_2, U_3)$$

Corollaire : (déduction)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si A admet n valeurs propres distinctes alors elle est diagonalisable

Ex : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$ $\quad X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$ $\quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ A est diagonalisable

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ dans l'ordre & on change et on multiplie par (-1)

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$P^{-1} . A . P$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

Proposition :

$A \in M_n(\mathbb{R})$ A est diagonalisable si et seulement si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendant associés à chaque valeur propre est égal à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre comme solution de l'équation caractéristique $P_A(\lambda) = 0$

III pratique de la diagonalisation :

Soit A une matrice à diagonaliser

1. calcul de polynôme caracteristique de A soit $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ puis des racines de ce polynôme $(P_A(\lambda) = 0)$
2. si $P_A(\lambda) = 0$ a n racines distinctes alors A est diagonalisable et les colonnes de P seront les n vecteurs propres.
3. Sinon pour chaque valeur propre λ, on déterminer le sous-espaces propre associé, noté E_λ
   Si pour l'une des valeurs propres de λ, la dimension de E_λ est inférieure à l'ordre de multiplicité de λ alors A n'est pas diagonalisable
4. sinon A est diagonalisable et la juxtaposition des vecteurs propres forme la matrice $P / P^{-1}.A.P = D$
   D diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A dans l'ordre des vecteurs propres de P

EXEMPLE 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 2\right) - 2(2-\lambda)$

$= (2-\lambda)\left((2-\lambda^2 - 2 - 2)\right)$

$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 2^2\right)$

$= (2-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda)$

$P_A(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)(4-\lambda)$

$P_A(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$

A à 3 valeurs propres distincts, donc elle est diagonalisable

calcul du P

$\Rightarrow$ calcul des vecteurs propres de A

$\lambda_1 = 0$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$AX = 0 \cdot X = 0$

$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -y \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$

$AX = 2X$

$\begin{cases} 2x + 2y = 2x \\ x + 2y + z = 2y \\ 2y + 2z = 2z \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda_3 = 4$ $\qquad AX = 4X$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4x \\ x + 2y + z = 4y \\ 2y + 2z = 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R}^* \\ y = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(colonnes : X_1, X_2, X_3)

$$P^{-1}.A.P = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D}$$

Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de valeurs propres

$P_A(\lambda) = \det(A - I_3)$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \;] -$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)-3\right)$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2-4\lambda)$$

$$P_A(\lambda) = (4-\lambda)\lambda(\lambda-4)$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-4)^2}$$

$$P_A(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{simple } (1) \\ \lambda_2 = 4 & \text{double } (2) \end{cases}$$

multiplicité de $0 = 1$

" " $4 = 2$

calcul de valeurs propres

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$AX = 4X$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y + z = 4x \\ -x + 3y + z = 4y \\ 2x + 2y + 2z = 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-y+z=0 \\ -x-y+z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x+y-z=0}$$

$$\boxed{z=x+y}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U_2} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U_3}$$

la valeur propre $\lambda_2 = 4$ possède 2 vecteur propre donc A est diagonalisable

$\lambda_1 = 0$

$AX = 0 . X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y+z=0 \\ -x+3y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4y=0 \Rightarrow \boxed{x=y} \\ x+y+z=0 \Rightarrow 2y+z=0 \\ \qquad \Rightarrow \boxed{z=-2y} \end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{U_1}$$

Soit
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(colonnes : U_1, U_2, U_3)

on sait que : $P^{-1} A . P = D$

où $D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

A est-elle diagonalisable ?

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda) + (3-\lambda)\left((2-\lambda)(3-\lambda) - 1\right)$

$= (3-\lambda) + (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 5)$

$= (3-\lambda)(1 + \lambda^2 - 5\lambda + 5)$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$

$= (3-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

$P_A(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda_1 = 3 & \text{double} \\ \lambda_2 = 2 & \text{simple} \end{cases}$

vecteur propres

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad AX = 3X$

$Ax = 3X \iff \begin{cases} 2x + y + z = 3x \\ x + 3y = 3y \\ -x + 3z = 3z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 & \text{ou } z = -y \\ x = 0 \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda_1 = 3$ vecteur propre double n'a qu'un seul vecteur propre donc A n'est pas diagonalisable

VI Application de la diagonalisable :

① caclul des puissances ce ces matrices :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit $k \in \mathbb{N}$ on veut calculer A^k

si A est diagonalisable alors $\exists P$ inversible / $D = P^{-1}A.P$

$P^{-1} A P = D$

$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$P \cdot P^{-1} . A . P \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$I . A . I = P . D . P^{-1}$

$A = P D P^{-1}$

$A^k = \underbrace{A . A \dots A}_{k \text{ fois}}$

$= P D \underbrace{P^{-1} . P}_{I} D \underbrace{P^{-1} \dots P}_{I} D \underbrace{\dots P}_{I} D P^{-1}$

$P . \underbrace{D . D \dots D}_{k \text{ fois}} . P^{-1}$

$$\boxed{A^k = P . D^k . P^{-1}}$$

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calculer A^k

diagonalisons A

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$= 2-\lambda\left((5-\lambda)(3-\lambda)-3\right)$

$= 2-\lambda\left(\lambda^2-8\lambda+12\right)$

$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-6)$

$P_A = -(\lambda-2)^2(\lambda-6)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 & \text{double} \\ \lambda_2 = 6 & \text{simple} \end{cases}$$

vecteurs propres :

$AX = 2X$

$$\begin{cases} 5x + 3y - 3z = 2x \\ x + 3y - z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $x + y - z = 0$

ou $x = z - y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_2}$$

A est bien diagonalisable

$\lambda_2 = 6$

$$AX = 6X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y - 3z = 6x \\ x + 3y - z = 6y \\ \boxed{2z = 6z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad x = 3y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_3}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (U_1 \; U_2 \; U_3)$$

$$P^{-1} . A . P = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} . A . P = D$$

$$\Rightarrow A = P . D . P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = P . D^n . P^{-1}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4.2^n \\ -2^n & 3.2^n & 2^n \\ 6^n & 6^n & -6^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^n+3.6^n & -3.2^n+3.6^n & 3.2^n-3.6^n \\ -2^n+6^n & 3.2^n+6^n & 2^n-6 \\ 0 & 0 & 4.2^n \end{pmatrix}$$

$n=0$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$n=1$

$A^1 = A$

② Résolution d'un système de suites recurrentes linéaires :

soient (U_n), (v_n), (w_n) 3 suites définies par leurs 1ers termes U_0, v_0, w_0 et par le système

$$\begin{cases} U_n = a_{11} U_{n-1} + a_{12} v_{n-1} + a_{13} w_{n-1} \\ v_n = a_{21} U_{n-1} + a_{22} v_{n-1} + a_{23} w_{n-1} \\ w_n = a_{31} U_{n-1} + a_{32} v_{n-1} + a_{33} w_{n-1} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$$

$$= A . A X_{n-2}$$

$$= A^2 X_{n-2}$$

$$= A^2 X_{n-3}$$

$$= A^3 X_{n-3}$$

~~$= A^n . X_n$~~

$X_n = A^n . X_{n-n}$

$$\boxed{X_n = A^n X_0} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

pour calculer X_n il faut calculer A^n

si A est diagonalisable alors $\exists P / P^{-1}.A.P = D$

car $A = P.D.P^{-1}$

Soit $A^n = P . D^n . P^{-1}$

donc $X_n = (P.D^n.P^{-1}) X_0$

Ex : $U_0 = v_0 = w_0 = 1$

$$\begin{cases} U_n = 5U_{n-1} + 3v_{n-1} - 3w_{n-1} \\ v_n = U_{n-1} + 3v_{n-1} - w_{n-1} \\ w_n = 2w_{n-1} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_n \\ v_n \\ w_o \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$$

ou $X_n = A^n . X_0$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^n + 3.6^n & + -3.2^n + 3.6^n & + 3.2^n - 3.6^n \\ -2^n + 6^n & + 3.2^n + 6^n & + 2^n - 6^n \\ 0 & + 0 & + 4.2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^n + 3.6^n \\ 3.2^n + 6^n \\ 4.2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_n \\ v_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} U_n = \frac{1}{4}(2^n + 3.6^n) \\ v_n = \frac{1}{4}(3. \\ w_n = 2^n \end{cases}$$

Chapitre III : Produit scalaire - Formes quadratiques.

I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

Définition :

on appelle produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ noté f de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est qui possède les propriétés suivantes :

⊕ **Bilinéarité :**

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow f(x.y)$$

$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$

$f(x . y + y') = f(x . y) + y f(x . y')$

$f(x, \beta y) = \beta f(x . y)$

+ Symétrique :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$f(x, y) = f'(y, x)$

+ positivité

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x, y) \geq 0$

+ non dégénérescence.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x . y) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$

on note $f(x, y) = \langle x, y \rangle f$

Ex : $x, y \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_i) y = / (2y \qquad y = (y_i)$

$i = 1, \ldots n$

$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i , y_i$ est le produit scalaire canonique ou usuel de $\mathbb{R}^n$

$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

$\mathbb{R}^2$

$f(x, y) = 2 x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire est appelé espace vectoriel euclidien.

matrice d'un produit scalaire :

Définition : La matrice du produit scalaire $\langle ., . \rangle f$ sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est la matrice M de terme général m_{ij} tel que :

$m_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ e

$i = 1, \dots, n$

$j = 1, \dots, n$

Ex : $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → i composante

$M = (m_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle)$ (1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$)

$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$

I_n est la matrice de produit scalaire canonique

Proposition : la matrice d'un produit scalaire est symétrique

Définition : le nombre défini par $\sqrt{\langle X, X \rangle}$ est appelé norme de X et on note : $\|X\| = \sqrt{\langle X, Y \rangle}$

$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ pour le produit scalaire canonique

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

$X \in \mathbb{R}^n$ est de norme unitaire si $\|X\| = 1$

$y = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\|y\| = 1$

Définition : $X . Y \in \mathbb{R}^n$ X est orthogonale à Y

$\Leftrightarrow \langle X . Y \rangle = 0$

on note : $X \perp Y$

Définition : on appelle matrice orthogonale (orthonormée) est une matrice dont les vecteurs colonnes sont 2 à 2 orthogonaux et de norme unitaire

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale $\Leftrightarrow {}^tA . A = A^t . A = I_n$

$\Leftrightarrow \boxed{A^{-1} = A}$

II matrice symétriques réelles :

$A \in M_n(\mathbb{R})$

A symétrique $\Leftrightarrow A^t = A$

proposition 1 : les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

proposition 2 : Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle associés à 2 valeurs propres distincts sont orthogonaux.

$X \neq 0 \,/\, AX = \lambda X$

$Y \neq 0 \,/\, AY = \mu Y$ | $\lambda \neq \mu$

$AX = \lambda X$

${}^t.Y \cdot AX = {}^tA . \lambda X$ | ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

${}^t(yAX) = {}^t(\lambda^t yX)$

${}^tX . {}^tA . {}^t({}^ty) = {}^tX . {}^t({}^ty)\,{}^t\lambda$

car ${}^tA = A$

${}^tX . A . y = \lambda\,{}^tX . y$

car $Ay = \mu y$

${}^tX . \mu y = \lambda^t xy$

$\mu^t xy = \lambda^t xy$

$\mu^t xy \neq \lambda^t xy = 0$

$(\mu - \lambda)\,{}^tXY = 0$

or $\mu \neq \lambda$

$\mu - \lambda \neq 0$

${}^tXY = 0$

$\langle X.Y\rangle = 0 \Rightarrow X \perp Y$ X est orthogonale à Y

$$\langle X.Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{{}^tX} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y}$$

Théorème : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et admet une matrice de passage orthogonale.

EX :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A est diagonalisable car A est symétrique.

Diagonalisons A :

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right)$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2)$$

$P_A(\lambda) = -\lambda\,(\lambda^2 - 3\lambda)$

$$\boxed{P_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3)}$$

$P(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{double} \\ \lambda_2 = 3 & \text{simple} \end{cases}$

vecteurs propres : $\lambda_1 = 0$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(AX = 0.X = 0)$

$AX = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$\iff x + y + z = 0$

$\iff z = -x - y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2}$

$u_1 \perp u_2$?

$\langle u_1, u_2 \rangle = {}^t u_1 . u_2$

$= (1 . 0 \; -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cherchons un autre $u_2 \,/\, u_1 \perp u_2$

$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

u_2 doit vérifier $\rightarrow x + y + z = 0$

$\rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0$

$\langle u_1, u_2 \rangle = {}^t u_1 . u_2$

$P_A(\lambda) = -\lambda\ (\lambda^2 - 3\lambda)$

$P_A(\lambda) = -\lambda^2\ (\lambda - 3)$

$P(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{double} \\ \lambda_2 = 3 & \text{simple} \end{cases}$

vecteurs propres : $\lambda_1 = 0$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (AX = 0.X = 0)$

$AX = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$\iff x + y + z = 0$

$\iff z = -x - y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2}$

$u_1 \perp u_2$?

$\langle u_1, u_2 \rangle = {}^t u_1 . u_2$

$= (1 . 0 - 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cherchons un autre u_2 / $u_1 \perp u_2$

$u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

u_2 doit vérifier → $x + y + z = 0$
→ $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$

$\langle u_1, u_2 \rangle = {}^t u_1 . u_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\langle u_1, u_2 \rangle = x - z = 0$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z + y + z = 0 \\ x = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad y = -2z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \qquad AX = 3X$

$$\begin{cases} x + y + z = 3x \\ x + y + z = 3y \\ x + y + z = 3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x = y \\ y = z \end{pmatrix} \qquad x = y = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3}$$

$\langle U_1, U_3 \rangle = (1 \ 0 \ -1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

$\langle U_2, U_3 \rangle = (1 \ -2 \ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

(U_1, U_2, U_3) est une base de vecteurs propres 2 à 2 orthogonaux.

$\| U_1 \| = \sqrt{\langle U_1, U_1 \rangle} = \sqrt{{}^tU_1 \cdot U_1}$

${}^tU_1 \cdot U_1 = (1 , 0 \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2$

$\| U_2 \| = \sqrt{{}^tU_2 \cdot U_2}$

${}^tU_2 \cdot U_2 = (1 \ -2 \ 1)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 6$

$\| U_3 \| = \sqrt{{}^tU_3 \cdot U_3}$

${}^tU_3 \cdot U_3 = (1 \ 1 \ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3$

$\| U_1 \| = \sqrt{2}$

$\| U_2 \| = \sqrt{6}$

$\| U_3 \| = \sqrt{3}$

$u_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$u_3 = \frac{U_3}{\|U_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

P est orthogonale

$P^{-1} = {}^tP$

$P^{-1} . A . P = {}^tP . A . P = D$

où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$

$${}^tX . A . X > 0$$

Ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$${}^tX . A . X = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (x, y, z)\begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2y^2 + 3z^2 > 0$$

$$\forall X \neq 0$$

A est définie positive

Proposition : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive $\Leftrightarrow$ toutes ses valeurs propres sont strictement positive.

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A) = 2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = -3 \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 sont solutions de : $X^2 - 2X - 3 = 0$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 < 0 \\ \lambda_2 = 3 > 0 \end{cases}$$

A n'est pas définie positive

$$\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P \end{cases}$$

α et β sont solution de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

$\alpha\beta = P$

$\beta = S - \alpha$

$\alpha(S - \alpha) = P$

$\alpha S - \alpha^2 = P$

$\alpha^2 - \alpha S + P = 0$

de même : $\beta^2 - \beta S + P = 0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 3$

$\lambda_1 \lambda_2 = 1$

$X^2 - 3X + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases}$$ A est définie positive

Proposition : la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une matrice symétrique définie positive

Autrement dit :

une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ A est symétrique définie positive

si A est symétrique définie positive alors l'application φ définie par $\varphi(X, Y) = {}^tX . A . Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ A est une matrice symétrique définit positive

$\varphi(X, Y) = {}^tX . A . Y$